PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS LINEARES EM TEMPO DISCRETO

Drielly Almeida da Silva[1], Diogo Ramalho de Oliveira[1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso do Sul (IFMS) – Três Lagoas - MS

drielly.as@gmail.com, diogo.ramalho@ifms.edu.br

Resumo

Diversas técnicas de controle têm sido desenvolvidas com o objetivo de garantir a estabilidade e melhorar o desempenho de sistemas dinâmicos. Dentre as técnicas de controle existentes há o controle H∞, que tem o objetivo de mitigar a influência de uma entrada exógena na saída do sistema. Diante disso, este artigo tem por objetivo apresentar o projeto e a implementação de um controlador H∞ para um equipamento de suspensão ativa. O sistema dinâmico é representado por um sistema linear em tempo discreto através de espaço de estados. Este projeto de controle utiliza desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs). As LMIs são resolvidas utilizando o *software* gratuito SciLab e a simulação utiliza uma ferramenta desse *software*, chamada Xcos. Por fim, uma implementação prática ilustra a validade da metodologia.

Palavras-chave: controle H∞, LMIs, tempo discreto, suspensão ativa.

Introdução

O sistema dinâmico a ser controlado é uma suspensão ativa, pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da UNESP – Campus Ilha Solteira. O sistema de suspensão ativa é fabricado pela Quanser® e seu modelo esquemático está representado na Figura 1.

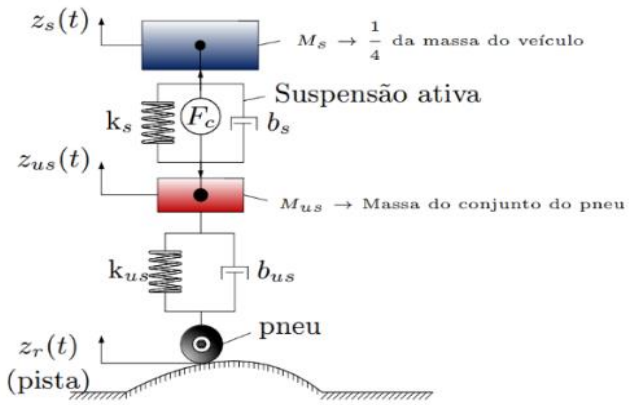

Figura 1. Modelo esquemático da suspensão ativa fabricada pela Quanser® (de Oliveira et al., 2014).

O equipamento utilizado possui três níveis de placas:

- Placa inferior (cinza): representa a pista pela qual o carro irá se mover;
- Placa do meio (vermelha): representa o chassi do carro;
- Placa superior (azul): representa o assento do motorista.

As posições das placas cinza, vermelha e azul são representadas por $z_r(t)$, $z_{us}(t)$, e $z_s(t)$, respectivamente. Todas essas posições são medidas através de *encoders*.

Além disso, para a representação do sistema apresentado na Figura 1 são necessárias as seguintes informações (Quanser, 2009): a massa de ¼ do corpo total do veículo ($M_s = 2{,}45$ kg), a massa do conjunto do pneu ($M_{us} = 1$ kg), e suas respectivas constantes de rigidez da mola ($k_s = 900$ N/m e $k_{us} = 2500$ N/m) e coeficientes de amortecimento ($b_s =$ 7,5 Ns/m e $b_{us} = 5$ Ns/m). Por fim, F_c é o sinal de controle $u(t)$ que representa a força aplicada por um motor para tracionar as placas azul e vermelha.

Metodologia

Para realizar a simulação do sistema de controle, considera-se que a lei de controle é aplicada utilizando um conversor digital para analógico (D/A) de ordem zero, tal que $u(t) = u(kT)$, para $kT \leq t < (k+1)T$, sendo T o período de amostragem e k a amostra. Para isso, é necessário utilizar uma ferramenta do *software* SciLab chamada de Xcos. O Xcos é um editor gráfico utilizado para projetar modelos de sistemas dinâmicos em domínios de tempo discreto e contínuo.

Resumindo, na simulação considera-se que o sistema de suspensão está em tempo contínuo, com uma lei de controle em tempo discreto que utiliza um conversor D/A de ordem zero. Dessa forma, é necessário discretizar o modelo matemático do sistema de suspensão ativa para o projeto de controle via LMIs.

A princípio, considere o seguinte sistema linear em tempo contínuo descrito através de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ é a derivada temporal do vetor de estado $x(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ é a entrada exógena, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times q}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ são matrizes conhecidas.

O sistema de suspensão ativa da Figura 1 pode ser representado matematicamente por (1)-(2), sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{b_s + b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} \text{ e } w(t) = \dot{z}_r(t).$$

Substituindo os valores das constantes do sistema (M_s, M_{us}, k_s, k_{us}, b_s e b_{us}) nas matrizes A, B, H e C, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367.34 & -3.06 & 0 & 3.06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7.5 & -2500 & -12.5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.40 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A implementação no sistema de suspensão ativa está esquematizada na Figura 2.

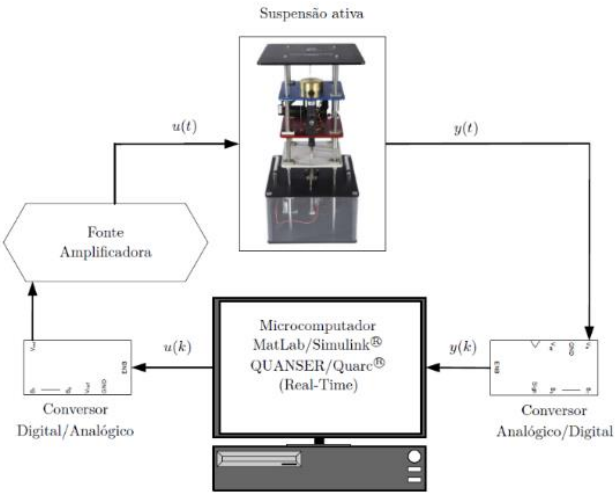

Figura 2. Diagrama utilizado para implementação prática.

A partir da Figura 2, note que a saída ($y(t) = z_s(t) - z_{us}(t)$) é medida e enviada para o computador. Essas informações passam por um conversor Analógico/Digital (A/D), obtendo o sinal discretizado $y(k)$, para que o computador possa interpretar esses dados. A técnica de controle é processada pelo computador, através do *software* MatLab/Simulink, para calcular o sinal de controle discreto $u(k)$. O sinal de controle $u(k)$ passa inicialmente por um conversor Digital/Analógico (D/A) e depois por um amplificador de potência para obter o sinal de controle contínuo $u(t)$ com energia suficiente para alimentar o atuador da suspensão ativa.

Em diversos trabalhos, como por exemplo em (de Oliveira et al., 2014), utiliza-se o modelo contínuo do sistema de suspensão ativa para realizar o projeto de controle. Essa consideração pode ser feita pois o período de amostragem (T) utilizado é relativamente pequeno em comparação com a dinâmica do sistema mecânico. Em (de Oliveira et al., 2014) foi utilizado um período de amostragem de $T = 1$ ms.

Entretanto, um dos objetivos deste trabalho é realizar um projeto de controle para sistemas em tempo discreto. No projeto de controle e na implementação prática, será considerado um período de amostragem de $T = 10$ms, maior que o tempo de amostragem utilizado em (de Oliveira et al., 2014).

Representação do sistema em tempo discreto

O modelo matemático em tempo discreto equivalente ao sistema em tempo contínuo (1) e (2), considerando $u(t) = u(kT)$, para $kT \leq t < (k+1)T$, pode ser representado por

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + H_d w(k), \quad (4)$$

$$y(k) = C_d x(k) \quad (5)$$

sendo que

$$A_d = e^{AT},\ B_d = \int_0^T e^{A\eta}\, d\eta B, H_d = TH \text{ e } C_d = C.$$

Utilizando o *software* SciLab, considerando um período de amostragem $T = 10$ms e as matrizes A, B, H e C dadas em (3), as matrizes A_d, B_d, H_d e C_d são dadas a seguir:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0{,}941 & 0{,}009 & 0{,}115 & -0{,}008 \\ -3.419 & 0{,}953 & -0{,}496 & 0{,}043 \\ 0{,}041 & 0{,}0004 & 0{,}883 & 0{,}008 \\ 7{,}815 & 0{,}106 & -22{,}206 & 0{,}732 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0{,}0000655 \\ 0{,}003799 \\ -0{,}000046 \\ -0{,}008683 \end{bmatrix}, H_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}01 \\ -0{,}05 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Projeto de controle H∞ usando LMIs

Considerando que a lei de controle por realimentação de estados é dada por $u(kT) = Kx(k)$, sendo que $u(kT), K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, o Teorema 1 apresenta as condições de projeto de controle H∞ para um sistema em tempo discreto

Teorema 1. *O sistema (4) é estabilizável, por realimentação de estados se, e somente se, existirem* $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$. $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ *e um escalar* μ *que satisfaçam o seguinte problema convexo de otimização:*

$$\min \mu$$

sujeito a $X = X^T > 0$,

$$\begin{bmatrix} X & A_dX+B_dM & 0 & H_d \\ XA_d^T+M^TB_d^T & X & XC_d^T & 0 \\ 0 & C_dX & I & 0 \\ H_d^T & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0.$$

O controlador dado por $K = MX^{-1}$ *assegura um custo garantido H∞ igual a* $\gamma = \sqrt{\mu}$..

Resultados e Discussão

Utilizando o *software* SciLab, foi realizado o projeto de controle H∞ a partir do Teorema 1 e das matrizes A_d, B_d, H_d e C_d dadas anteriormente, restringindo a norma do controlador K utilizando a seguinte LMI [1]: $\begin{bmatrix} X & M' \\ M & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0$, sendo que $\rho = 40$ está associado ao valor máximo da entrada de controle $u(t)$. Considerando um período de amostragem $T = 10$ms, o seguinte controlador foi encontrado

$$K = [53{,}2878 \quad -100{,}8858 \quad 1369{,}1493 \quad 19{,}7648],$$

que garante ao sistema controlado um custo garantido H∞ igual a $\gamma = 1{,}4214$.

Os resultados de simulação foram obtidos utilizando a ferramenta Xcos do *software* SciLab, considerando uma entrada exógena do tipo chirp com amplitude de 2mm, frequência inicial de 1Hz e final de 15Hz, sendo que a frequência aumenta linearmente ao longo de 10s. A Figura 3 ilustra a simulação da dinâmica do sistema em malha aberta. Observe que o sistema em malha aberta é naturalmente estável, porém possui picos de ressonância que prejudicam o desempenho do sistema. A Figura 4 apresenta a simulação da dinâmica do sistema controlado, considerando a mesma entrada exógena. Observe que o controle H∞ mitigou a influência da entrada exógena na saída do sistema, diminuindo os picos de ressonância.

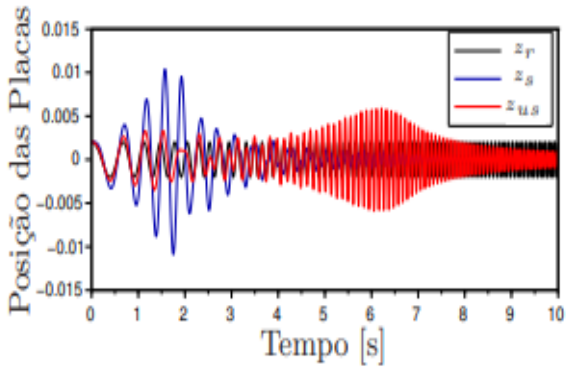

Figura 3. Simulação de resposta dinâmica do sistema de suspensão ativa em malha aberta.

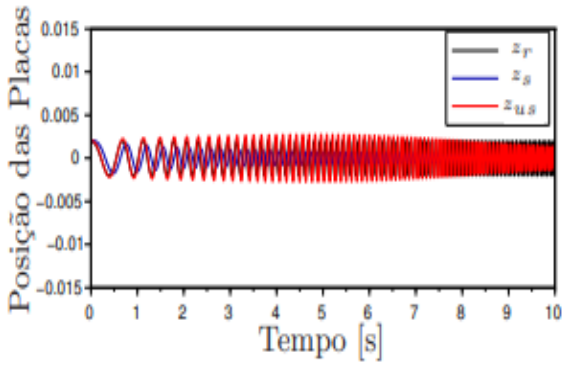

Figura 4. Simulação de resposta dinâmica do sistema de suspensão ativa em malha fechada.

Por fim, o mesmo controlador foi implementado no sistema de suspensão ativa da Figura 1 e 2. Durante a implementação, foi considerado o mesmo tipo de entrada exógena, porém com uma amplitude de 1,5mm para preservar a integridade física do equipamento, visto que as oscilações em malha aberta possuem uma amplitude elevada em determinadas frequências. Foram realizadas duas implementações, sendo uma em malha aberta e uma em malha fechada. Os resultados das duas implementações práticas estão apresentados juntos na Figura 5.

Analisando a Figura 5, o primeiro quadro apresenta a entrada exógena. Observe que para fins de implementação, foi considerado que a entrada exógena é nula para um intervalo de tempo menor que 0,5s e maior que 9,5s. No segundo quadro é apresentada a movimentação da placa azul (posição do motorista) em malha aberta (azul) e malha fechada (preto). Já no terceiro quadro é apresentada a movimentação da placa vermelha (chassi) em malha aberta (vermelho) e malha fechada (preto). Note que o sistema em malha fechada possui menores oscilações em ambas as placas.

Considerações Finais

O trabalho apresentou o projeto de controle H∞ para um sistema de suspensão ativa, que está sujeita a uma entrada exógena. O projeto considerou que a lei de controle é implementada de forma digital e as condições de projeto foram dadas através de LMIs. Para isso foi necessário discretizar o modelo em tempo contínuo. O *software* SciLab resolveu as LMIs, retornando o valor do controlador K, que realimenta o vetor de estado do sistema. Além disso, utilizando o Xcos, foi possível simular o comportamento do sistema antes de realizar a implementação prática. Por fim, o projeto de controle foi implementado na prática e os resultados validam a metodologia proposta. Observou-se que o controle H∞ foi capaz de reduzir a influência da entrada exógena na saída do sistema, como observado na Figura 5.

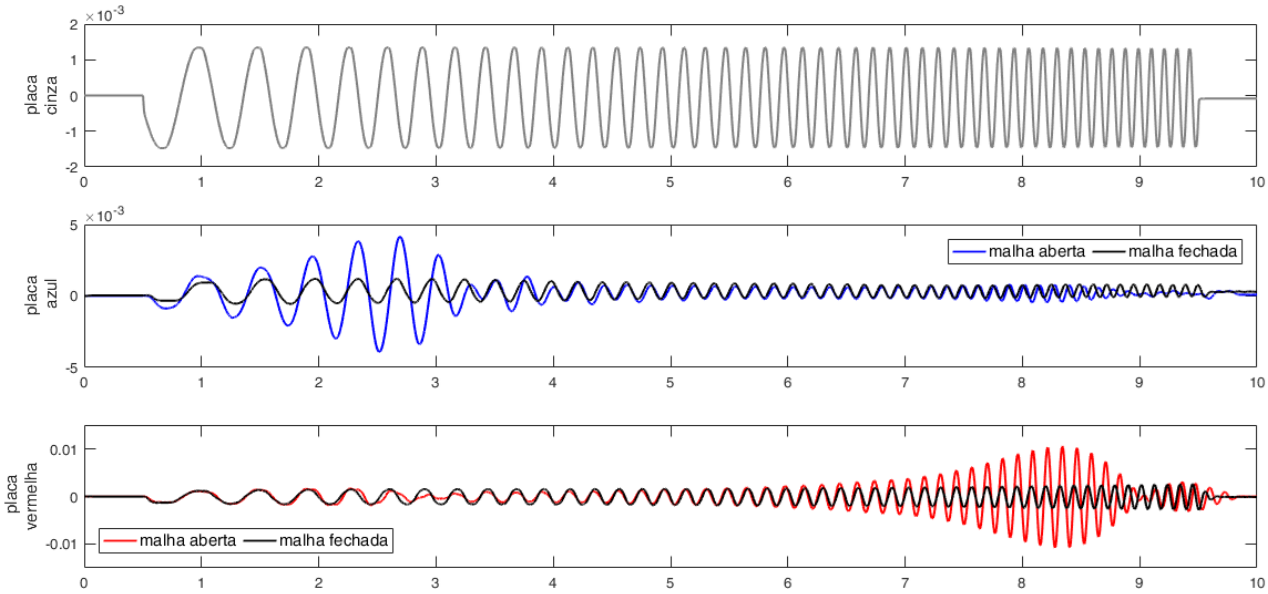

Figura 5. Implementação prática do controle H∞.

Agradecimentos

Ao incentivo financeiro do CNPq e do IFMS através do Edital 028/2019-Propi/IFMS. À UNESP/FEIS por permitir a utilização do LPC e suspensão ativa.

Referências

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15. Studies in Applied Mathematics, SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, 1994.

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., de Souza, W. A., Moreira, M. R. e Silva, J. H. P. (2014). Projeto de controle robusto H∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa, XX Congresso Brasileiro de Automática.

de Oliveira. D. R, Teixeira, M. C.M., Alves, U. N. L. T., Souza,W. A., Assunção E., Cardim R. On local H∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 344: 1-26, 2018.

E. Assunção; M. C. M. Teixeira; F. A. Faria; N. A. P. D. Silva; R. Cardim. "Robust State-derivative Feedbak LMI-based Designs for Multivariable Linear Systems", International Journal of Control, Hants, v.80, n.8, p. 1260-1270, 2007.

Quanser, I. (2009). Active Suspension: User's Manual, Technical report.

S. Boyd; L. E. Ghaoui; E. Feron; V. Balakrishnan. "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory". 2nd. Ed. [S.1.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).